DÉRIVATION : COURS

I. Nombre dérivé en x_0

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
Cette limite est appelée nombre dérivé en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarque : Il ne faut pas écrire « $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ » si l'existence de cette limite n'a pas encore été justifiée.

2. Meilleure approximation affine

Théorème 1
f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel l tel que $f(x_0+h) = f(x_0) + l\,h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$
Alors $l = f'(x_0)$.

Remarque : on parle d'approximation affine car on remplace la fonction $h \longmapsto f(x_0+h)$ par la fonction affine $h \longmapsto f(x_0) + f'(x_0)h$.
L'erreur commise en effectuant ce remplacement est $h\,\varepsilon(h)$. Cette erreur n'est petite que lorsque h est très petit.

Exemples importants :
$(1+h)^2 = 1 + 2h + h\varepsilon(h)$
$\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h\varepsilon(h)$
$(1+h)^3 = 1 + 3h + h\varepsilon(h)$
$\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{1}{2}h + h\varepsilon(h)$
avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

3. Lien avec la notion de limite

Propriété 1
Si f est dérivable en x_0, alors f admet une limite finie en x_0.

Remarque : la réciproque est fausse !

4. Nombre dérivé à droite. Nombre dérivé à gauche

Définition
Si $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en x_0 et on note $f'_d(x_0)$ cette limite, appelée « nombre dérivé à droite » en x_0.

On définit de façon similaire le nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$. Dans le cas où l'expression de f(x) n'est pas la même avant et après x_0 et si f admet une limite finie en x_0 (qui est alors $f(x_0)$), alors :

Théorème 2
f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.

5. Interprétation graphique et mécanique

Propriété 2
S'il existe, le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Remarque : Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 et fait un « angle » en ce point.

Propriété 3
Si x(t) désigne l'abscisse, à l'instant t, d'un point mobile se déplaçant sur un axe et si $t \longmapsto x(t)$ est dérivable en t_0, alors $x'(t_0)$ est la vitesse instantanée du point mobile à l'instant t_0.

Remarque : Il ne faut pas confondre avec la vitesse moyenne entre t_0 et t_1 qui est $\dfrac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$.

II. Fonction dérivée

1. Définition

La fonction dérivée est la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Remarque : il ne faut pas confondre le nombre dérivé $f'(x)$ et la fonction dérivée f' (comme il ne faut pas confondre f (x) et f).

2. Propriétés

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur le même ensemble D, alors les fonctions suivantes sont dérivables et :

$(au + bv)' = au' + bv'$ pour a, b réels quelconques
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, aux points x tels que $v(x) \neq 0$
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$, aux points x tels que $v(x) \neq 0$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
Si $F(x) = u(ax + b)$, $F'(x) = au'(ax+b)$ a,b réels quelconques

Propriété 4
Une fonction paire a une dérivée impaire.
Une fonction impaire a une dérivée paire.

Remarque : utiliser cette propriété comme vérification lorsqu'on dérive une fonction paire ou une fonction impaire.

3. Dérivées usuelles

f(x)	f ' (x)	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
ax + b	a	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	2ax + b	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{(ax+b)}}$	$\{x \in \mathbb{R}$ / ax + b > 0
cos *x*	-sin *x*	$x \in \mathbb{R}$
sin *x*	cos *x*	$x \in \mathbb{R}$

III. Utilisation des dérivées

1. Sens de variation d'une fonction

Théorème 3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
f est croissante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
f est décroissante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
f est constante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque : ce théorème n'est valable que sur un intervalle. Par exemple la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et sur $\mathbb{R}^{*+}$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

2. Lien avec la notion de bijection

Théorème 4
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle [a, b].
- Si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$, alors f réalise une bijection strictement croissante de [a, b] sur [f(a), f(b)].
- Si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$, alors f réalise une bijection strictement décroissante de [a, b] sur [f(b), f(a)].

Remarque :

- On peut remplacer f(a) par $\lim_{a} f$ et [a, b] par]a, b], [f(a), f(b)] par] $\lim_{a} f$, f(b)], lorsque f n'est pas définie en a mais admet en a une limite (finie ou infinie).
- si f^{-1} est la bijection réciproque, alors f^{-1} a le même sens de variation que f.

3. Extrema d'une fonction

Théorème 5
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.
Si f ' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum en x_0.

Remarque : dans ce cas, C_f admet une tangent horizontale en $M_0(x_0, f(x_0))$.

4. Plan d'étude d'une fonction

- Ensemble de définition D_f.
- Eventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude).
- Limites ou valeurs de f aux bornes des intervalles constituant D_f et éventuelles asymptotes.
- Existence et détermination de f ' (en utilisant les opérations ou la définition) puis signe de f '(x).
- Tableau de variation récapitulant les résultats précédents.
- Recherche éventuelle d'un centre ou d'un axe de symétrie.
- Tracé de la courbe après avoir placé :
  - les axes du repère avec la bonne unité ;
  - les points particuliers (tangente horizontale ou verticale, intersection avec les axes, ...) ;
  - les éventuelles asymptotes.