

## EXERCICE 1

Dérivabilité

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $x \mapsto x\sqrt{x}$ .

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  positif.

## EXERCICE 2

Usage de la quantité conjuguée

Chercher la limite en  $+\infty$  de  $x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$ .

## EXERCICE 3

Etude d'une fraction rationnelle

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ .

On désigne par  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

➤ Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que : pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$ .

➤ Etudier les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de la fonction  $g$  définie sur  $D$  par :  $g(x) = f(x) - x + 1$ .

Que peut-on en conclure pour  $C$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 1$  ?

Etudier la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .

➤ Etudier les variations de  $f$ . Tracer  $C$ .

➤ Montrer que le point  $I(-1; -2)$  est centre de symétrie de  $C$ .

## EXERCICE 4

Fonction tangente

Etudier la fonction  $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ .

## EXERCICE 5

Inégalité des accroissements finis

A l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que, pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \sin x \leq x$ .

## EXERCICE 6

Bijection

Montrer que  $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2; +\infty[$  sur un intervalle que l'on déterminera.

## EXERCICE 7

Résolution d'équation

Montrer que l'équation  $x^5 + x - 3 = 0$  a une solution unique sur  $\mathbb{R}$  dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

# CORRECTION

## EXERCICE 1

Dérivabilité

➤ la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

➤ Etude de la dérivabilité de  $f$  en 0 :

Tout le soutien scolaire sur [www.aides-services.com](http://www.aides-services.com)

Pour des cours particuliers appelez le 04 70 05 45 68 ou 04 73 85 50 08 ou 06 88 55 84 04  
ou [julien@aides-services.com](mailto:julien@aides-services.com)

$$\text{Pour } x > 0 \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

La fonction  $f$  est donc dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

### EXERCICE 2

Usage de la quantité conjuguée

Les théorèmes classiques sur les limites ne permettent pas de conclure immédiatement.

Cependant pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \frac{x \times 1}{x \times 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}.$$

### EXERCICE 3

Etude d'une fraction rationnelle

☛ Pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)x + (b+c)}{x+1}.$$

D'où, par identification des coefficients :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \text{ est équivalent à : } \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3. \end{cases}$$

On en déduit que  $a=1$ ,  $b=-1$  et  $c=4$ .

On obtient pour tout  $x \in \mathbb{D}$ ,

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}.$$

$$\text{☛ Pour tout } x \in \mathbb{D}, \quad g(x) = f(x) - x + 1 = \frac{4}{x+1},$$

$$\text{d'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = 0.$$

Graphiquement la différence des ordonnées  $y_M - y_P$  (voir figure) a pour limite 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , donc  $\Delta$  est asymptote à C.

Si  $x > -1$ , alors  $g(x) > 0$  et C est au-dessus de  $\Delta$ .

Si  $x < -1$ , alors  $g(x) < 0$  et C est au-dessous de  $\Delta$ .

☛ La fonction  $f$  est rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

D'après l'étude précédente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty ; \text{ de même } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Tout le soutien scolaire sur [www.aides-services.com](http://www.aides-services.com)

Pour des cours particuliers appelez le 04 70 05 45 68 ou 04 73 85 50 08 ou 06 88 55 84 04  
ou [julien@aides-services.com](mailto:julien@aides-services.com)

On a aussi :  $\lim_{(-1)^-} f = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$  et  $\lim_{(-1)^+} f = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$ .

On peut dresser le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$		$0$	
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$2$	$+\infty$

Cherchons une équation de  $C$  dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $I(-1; -2)$ .

Soit un point  $M$  du plan ; si  $(x, y)$  sont ses coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et si  $(X, Y)$  sont ses coordonnées dans  $(I, \vec{i}, \vec{j})$ , alors  $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$

Une équation de  $C$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est  $y = x - 1 + \frac{4}{x+1}$ .

Donc une équation de  $C$  dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$  est  $Y - 2 = X - 1 + \frac{4}{X - 1 + 1}$ , c'est à dire  $Y = X + \frac{4}{X}$ .

Dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$ , la fonction  $h : X \mapsto X + \frac{4}{X}$  a pour représentation graphique la courbe  $C$ .

Or la fonction  $h$  est impaire. Le point  $I$  est donc centre de symétrie de la courbe  $C$ .

#### EXERCICE 5

Inégalité des accroissements finis  
(hors programme)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$ .

Or pour  $t \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ , on a  $0 \leq \cos t \leq 1$ , donc  $0 \leq \sin'(t) \leq 1$ .

En appliquant le théorème sur les inégalités des accroissements finis sur  $[0; x]$ , on obtient :  
 $0 \times (x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1 \times (x-0)$ ,  
et puisque  $\sin 0 = 0$ ,

$0 \leq \sin x \leq x$ . Donc pour tout  $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $0 \leq \sin x \leq x$ .

#### EXERCICE 6

Bijection

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[-2; +\infty[$ .

Elle est dérivable, donc continue, sur l'intervalle  $]-2; +\infty[$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2} = 0 = f(-2)$ , donc  $f$  est également continue en  $-2$ .

On en déduit que  $f$  est continue sur  $[-2; +\infty[$ .

Pour  $x \in ]-2; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$  d'où  $f'(x) > 0$ , et  $f(x) > f(-2)$ .

Dressons le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$0$	$+\infty$

$f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[-2; +\infty[$ .  $f$  réalise donc une bijection de  $[-2; +\infty[$  sur  $[0; +\infty[$ .

#### EXERCICE 7

Résolution d'équation

Soit la fonction  $f(x) = x^5 + x - 3$  avec  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue dans  $\mathbb{R}$ .  $f'(x) = 5x^4 + 1$   $f'(x) > 0$  pour  $x$  dans  $]-\infty; +\infty[$  (et donc  $f(x)$  est partout croissante).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$   $f(x)$  étant continue, partout croissante et passant d'une valeur négative à une valeur positive, on conclut qu'il y a une et une seule valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) = 0$ .

Il y a donc une solution unique à l'équation  $f(x) = x^5 + x - 3 = 0$  avec  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

Recherche par procédé dichotomique d'un encadrement de la solution à l'équation  $f(x) = x^5 + x - 3 = 0$ . On choisit une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) > 0$  et une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) < 0$  par exemple:  $f(2) = 31$  et  $f(1) = -1$

On sait alors que la solution  $\alpha$  sera telle que  $1 < \alpha < 2$  On calcule  $f(x)$  pour  $x =$  la moyenne arithmétique de 1 et 2, soit  $x = 3/2$   $f(3/2) = 6,09...$

On en conclut que  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

On calcule  $f(x)$  pour  $x =$  la moyenne arithmétique de 1 et  $3/2$ , soit  $x = 5/4$   $f(5/4) = 1,3...$

On en conclut que  $1 < \alpha < \frac{5}{4}$

On calcule  $f(x)$  pour  $x =$  la moyenne arithmétique de 1 et  $5/4$ , soit  $x = 9/8$   $f(9/8) = -0,7...$

On en conclut que  $\frac{9}{8} < \alpha < \frac{5}{4}$

On calcule  $f(x)$  pour  $x =$  la moyenne arithmétique de  $9/8$  et  $5/4$ , soit  $x = 19/16$   $f(19/16) = 0,5...$

On en conclut que  $\frac{9}{8} < \alpha < \frac{19}{16}$  soit  $1,125 < \alpha < 1,1875$

L'encadrement étant demandé à 0,1 près, on a:  $1,1 < \alpha < 1,2$

Tout le soutien scolaire sur [www.aides-services.com](http://www.aides-services.com)

Pour des cours particuliers appelez le 04 70 05 45 68 ou 04 73 85 50 08 ou 06 88 55 84 04  
ou [julien@aides-services.com](mailto:julien@aides-services.com)